

Übungsblatt 1111 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m) *Eine explizite Beschreibung der adischen Vervollständigung*

Sei $\mathfrak{a} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Ideal in einem noetherschen Ring A . Zeige, dass die Vervollständigung $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$ isomorph zu $A[[X_1, \dots, X_n]]/(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$ ist.

Aufgabe 2. (m+m) *Intervalle von Primidealen in noetherschen Ringen*

- Seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale in einem noetherschen Ring. Sei $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ die Menge aller derjenigen Primideale \mathfrak{r} mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{q}$. Zeige, dass $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ entweder leer oder unendlich ist.
- Sei A ein noetherscher Ring in dem alle Primideale in einer einzigen Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ mit $n \geq 2$ auftreten. Zeige: Es gibt ein Element $x \in A$ mit $x + 0 \neq x$.

Aufgabe 3. (m) *Dimension des Polynomrings im noetherschen Fall*

- Sei \mathfrak{p} ein Primideal in einem Ring, das minimal mit der Eigenschaft ist, ein gegebenes zerlegbares Ideal \mathfrak{a} zu umfassen. Zeige, dass \mathfrak{p} zu \mathfrak{a} assoziiert und sogar isoliert ist.
- Sei \mathfrak{p} ein Primideal der Höhe r in einem noetherschen Ring. Zeige, dass Elemente x_1, \dots, x_r existieren, sodass \mathfrak{p} unter allen Primidealen, die diese Elemente enthalten, minimal ist.
- Zeige für alle Primideale \mathfrak{p} eines noetherschen Rings: $\text{ht } \mathfrak{p}[X] = \text{ht } \mathfrak{p}$.
- Sei A ein Ring in dem die Behauptung von c) gilt. Sei $\mathfrak{q} \subseteq A[X]$ ein Primideal. Sei $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$. Zeige: $\text{ht } \mathfrak{q} \leq \text{ht } \mathfrak{p} + 1$.
- Folgere: Für noethersche Ringe $A \neq 0$ gilt $\dim A[X] = 1 + \dim A$.

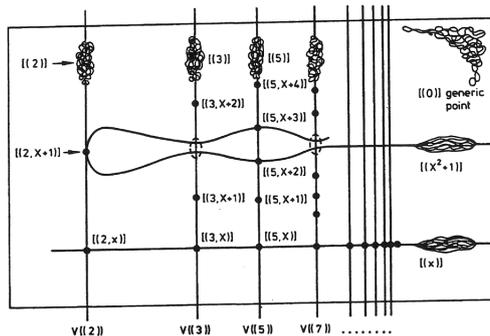
Aufgabe 4. (m) *Gar nicht mehr erste Schritte mit der Dimension von Ringen*

Berechne die Dimension des Rings $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X - Z, X^2 + Y^2 + Z^2)$.

Aufgabe 5. (0) *Der mystische Körper mit einem Element*

Der n -dimensionale projektive Raum \mathbb{P}_k^n über einem Körper k ist der Raum der Ursprungsgeraden in k^{n+1} .

- Wie viele Punkte enthält \mathbb{P}_k^n , wenn k ein Körper mit q Elementen ist? Gib die Anzahl als Polynom in q an.
- Im klassischen Zugang zur Algebra gibt es nichts, was die Bezeichnung *Körper mit einem Element* verdient hätte. Was passiert, wenn man trotzdem in der Formel aus a) $q := 1$ setzt? Was sollte also ein n -dimensionaler projektiver Raum über dem Körper mit einem Element sein?



Mumfords Schatzkarte: die Primideale von $\mathbb{Z}[X]$