

## Übungsblatt 13 zur Kommutativen Algebra

**Aufgabe 1.** (m+2) *Ein Erstsemestertraum wird wahr*

Sei ein Ring  $A$  mit der  $\mathfrak{a}$ -adischen Topologie bezüglich einem Ideal  $\mathfrak{a}$  versehen. Sei  $(x_n)_n$  eine Folge in  $A$ . Sei  $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$ . Zeige: Genau dann ist  $(s_n)_n$  eine Cauchy-Folge, wenn  $(x_n)_n$  eine Nullfolge ist.

**Aufgabe 2.** (3) *Abgeschlossenheit maximaler Ideale*

Sei  $\mathfrak{a}$  ein Ideal in einem Ring  $A$ . Zeige, dass ein maximales Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $A$  genau dann abgeschlossen bezüglich der  $\mathfrak{a}$ -adischen Topologie auf  $A$  ist, wenn  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ .

**Aufgabe 3.** (m) *Vervollständigung an maximalen Idealen*

Sei  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal in einem Ring  $A$ . Zeige, dass die Vervollständigung von  $A$  bezüglich der  $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie ein lokaler Ring ist.

**Aufgabe 4.** (2+m) *Analytische Umgebungen*

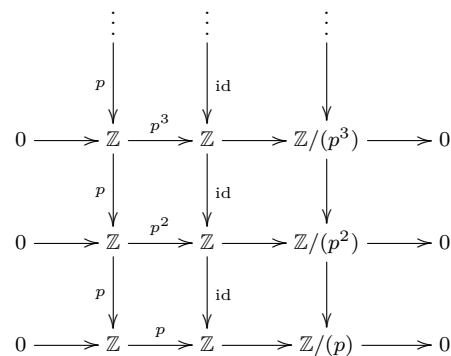
Sei  $K$  ein Körper mit  $2 \neq 0$ .

- a) Zeige:  $K[[X, Y]]/(Y^2 - X^2) \cong K[[X, Y]]/(Y^2 - X^2 - X^3)$ .
- b) Zeige:  $K[X, Y]/(Y^2 - X^2) \not\cong K[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3)$ .

**Aufgabe 5.** (2+2) *Nichtexaktheit der inversen Limesbildung*

Das Diagramm zeigt in seinen drei Spalten drei inverse Systeme  $A_\bullet$ ,  $B_\bullet$  und  $C_\bullet$  und horizontal die Komponenten einer kurzen exakten Sequenz  $0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$ .

- a) Bestimme die inversen Limes der drei Systeme.
- b) Ist  $\varprojlim_n^1 A_n = 0$ ? Beschreibe  $\varprojlim_n^1 A_n$  so gut wie möglich!



**Aufgabe 6.** (0) *Die 10-adischen Zahlen*

Finde ein Element  $x \in \mathbb{Z}_{10}$ , das weder Null noch Eins ist, aber trotzdem die Identität  $x^2 = x$  erfüllt. Kann ein Grundschulkind die ersten paar Ziffern von  $x$  bestimmen?

