Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 10 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+m+1+1) *Erste Schritte mit der Dimension von Ringen*

Bestimme für die folgenden Ringe ihre Dimension. Dabei ist K ein Körper.

a) K

b) $K[X]$

c) $\mathbb{Z}/(90)$

d) $K[X,Y]/(XY)$

Aufgabe 2. (3) *Beispiel für den Struktursatz artinscher Ringe*

Schreibe den artischen Ring $\mathbb{Z}/(90)$ als Produkt artinscher lokaler Ringe. Gib also artinsche lokale Ringe $A_1, \ldots, A_n$ und einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/(90) \to A_1 \times \cdots \times A_n$ an.

Aufgabe 3. (m+2+3+m) *Artinität über einem Körper*

a) Seien R ein Ring und M ein einfacher R-Modul. Zeige, dass M isomorph zu einem R-Modul der Form $R/\mathfrak{m}$ ist, wobei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in R ist.

Sei im Folgenden A eine endlich erzeugte lokale Algebra über einem Körper K. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A.

b) Sei $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$ eine Kompositionsreihe eines A-Moduls M. Zeige, dass M als K-Vektorraum von Dimension $\dim_K M = n \cdot \dim_K(A/\mathfrak{m})$ ist.

c) Zeige, dass A genau dann als Ring artinsch ist, wenn A als K-Vektorraum endlich dimensional ist. Zeige weiter, dass in diesem Fall $\dim_K A = \ell(A) \cdot \dim_K(A/\mathfrak{m})$ gilt.

d) Zeige den ersten Teil der Behauptung aus Teilaufgabe c) auch für den Fall, dass A nicht lokal ist.

Aufgabe 4. (2+m+2+0) *Eine elementare Charakterisierung der Dimension*

Für ein Ringelement $x \in A$ sei $\mathfrak{b}_x$ das Ideal $(x) + (\sqrt{(0)} : x)$.

a) Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal. Sei $x \in A$. Zeige, dass $\mathfrak{b}_x \not\subseteq \mathfrak{p}$.

b) Sei $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ eine echte Inklusion von Primidealen. Sei $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$. Zeige, dass $\mathfrak{b}_x \subseteq \mathfrak{q}$.

c) Zeige für $n \geq 0$: Genau dann gilt $\dim A \leq n$, wenn $\dim A/\mathfrak{b}_x \leq n-1$ für alle $x \in A$.

d) Folgere: Ein Ring ist genau dann von Dimension $\leq n$, wenn für je $n+1$ Ringelemente $x_0, \ldots, x_n$ eine Zahl $r \geq 0$ mit

$$(x_0 \cdots x_n)^r \in (x_0 \cdots x_{n-1})^r (x_n^{r+1}) + (x_0 \cdots x_{n-2})^r (x_{n-1}^{r+1}) + \cdots + (x_0)^r (x_1^{r+1}) + (x_0^{r+1})$$

existiert.

Joke 21.5.2. *Old Macdonald had a form;* $e_i \wedge e_i = 0$.