

## Übungsblatt 3 zur Kommutativen Algebra

### Aufgabe 1. (2+2) *Der formale Potenzreihenring über dem Grundring*

Sei  $A$  ein Ring.

- Ist  $\mathfrak{m}$  ein maximales Ideal in  $A[[X]]$ , so gilt  $X \in \mathfrak{m}$ , die Kontraktion  $\mathfrak{m}_0 := A \cap \mathfrak{m}$  ist ein maximales Ideal in  $A$  und  $\mathfrak{m}$  ist das von  $\mathfrak{m}_0$  und  $X$  in  $A[[X]]$  erzeugte Ideal.
- Jedes Primideal von  $A$  ist Kontraktion eines Primideals von  $A[[X]]$ .

### Aufgabe 2. (2+m+m+2) *Rechnungen mit Idealen*

- Sei  $\mathfrak{a}$  ein Ideal eines Rings  $A$ . Finde einen Isomorphismus  $A[X]/\mathfrak{a}[X] \rightarrow (A/\mathfrak{a})[X]$ .
- Sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal eines Rings  $A$ . Zeige, dass dann auch  $\mathfrak{p}[X]$  in  $A[X]$  prim ist.
- Gilt die analoge Behauptung von b) auch für maximale Ideale?
- Untersuche folgende Ideale auf Primalität und Maximalität:  $(2, X)$  in  $\mathbb{Z}[X]$  und  $([2], [X])$  in  $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 6)$ .

### Aufgabe 3. (2+1) *Nichtbeispiele für Hauptidealbereiche*

- Sei  $A$  ein Ring derart, dass jedes endlich erzeugte Ideal von  $A[X]$  ein Hauptideal ist. Zeige, dass jedes reguläre Element von  $A$  schon invertierbar ist.
- Folgere:  $\mathbb{Z}[X]$  und  $\mathbb{Q}[X, Y]$  sind keine Hauptidealbereiche.

### Aufgabe 4. (m+2) *Ein radikales Distributivgesetz*

- Zeige, dass die Rechenregel „ $\mathfrak{a} \cap \sum_i \mathfrak{b}_i = \sum_i (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_i)$ “ für Ideale im Allgemeinen *nicht* gilt. *Hinweis.* In den Ringen  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}[X]$  wirst du kein Gegenbeispiel finden.
- Zeige, dass folgende Regel durchaus stets gilt:  $\sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\sum_i \mathfrak{b}_i} = \sqrt{\sum_i (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_i)}$ .

### Aufgabe 5. (2+1+0) *Der Darstellungssatz von Stone*

Sei  $A$  ein boolscher Ring. Sei  $\text{Spec } A$  die Menge der Primideale von  $A$ . Die Potenzmenge von  $\text{Spec } A$  bildet mit der symmetrischen Differenz als Addition und dem Schnitt als Multiplikation ebenfalls einen boolschen Ring.

- Gib explizit einen Ringhomomorphismus  $A \rightarrow \mathcal{P}(\text{Spec } A)$  an.
- Zeige, dass dieser injektiv ist.
- Zeige, dass der Morphismus Teil einer natürlichen Transformation  $\text{Id} \Rightarrow \mathcal{P} \circ \text{Spec}$  ist und dass es nur eine solche Transformation gibt.

*A friend told me that Obama became a communist after he became president, but I told him that couldn't be so. If you're a member of a radical ideal after being raised to a power, then you must have been part of it from the beginning.*