Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 2 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+2+1) *Invertierbarkeit und Nilpotenz in Ringen formaler Potenzreihen*

Sei A ein Ring. Sei $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots \in A[\![X]\!]$ eine formale Potenzreihe. Zeige:

a) Genau dann ist f eine Einheit in $A[\![X]\!]$, wenn a_0 in A invertierbar ist.

b) Ist f nilpotent, so sind alle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ nilpotent.

c) Gilt in b) die Umkehrung? (Es genügt ein plausibles Argument.)

Aufgabe 2. (2+m) *Nilradikal und Jacobsonsches Radikal*

Sei A ein Ring. Zeige:

a) Jacobsonsches Radikal und Nilradikal von $A[X]$ stimmen miteinander überein.

b) Genau dann liegt eine Potenzreihe f im Jacobsonschen Radikal von $A[\![X]\!]$, wenn $f(0)$ im Jacobsonschen Radikal von A liegt.

Aufgabe 3. (m) *Charakterisierung von Wurzelidealen*

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Rings. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ genau dann mit seinem Wurzelideal übereinstimmt, wenn $\mathfrak{a}$ ein Schnitt von Primidealen ist.

Aufgabe 4. (3+1) *Inhalt von Polynomen*

Sei A ein Ring. Der *Wurzelinhalt* eines Polynoms $f = a_0 + \cdots + a_m X^m \in A[X]$ ist das Ideal $J(f) := \sqrt{(a_0, \ldots, a_m)}$.

a) Zeige für alle Polynome $f, g \in A[X]$: $J(fg) = J(f) \cap J(g)$.

b) Ein Polynom heißt genau dann *primitiv*, wenn sein Wurzelinhalt das Einsideal ist. Folgere: Genau dann ist ein Produkt fg primitiv, wenn f und g es sind.

Aufgabe 5. (2+2+1) *Ideale bestehend aus Nullteilern*

a) Sei I ein Ideal eines Rings, das nur Nullteiler enthält. Zeige, dass es in der Partialordnung all derjenigen Ideale, die I umfassen und nur Nullteiler enthalten, ein maximales Element gibt.

b) Zeige, dass ein maximales Element wie in a) stets ein Primideal ist.

c) Folgere: Die Menge der Nullteiler eines Rings ist eine Vereinigung von Primidealen.

Was bildet eine abelsche Gruppe unter Addition, einen Monoid unter Multiplikation, erfüllt ein Distributivgesetz und ist verflucht?