Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 1 zur Kommutativen Algebra

Kummerkasten auf algebra.speicherleck.de

Aufgabe 1. (m+2+2) *Invertierbarkeit und Nilpotenz in Polynomringen*

Sei A ein Ring. Sei $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m \in A[X]$ ein Polynom über A. Zeige:

a) Genau dann ist f eine Einheit in $A[X]$, wenn a_0 in A invertierbar und die $a_1, \ldots, a_m$ nilpotent sind.

b) Genau dann ist f nilpotent, wenn $a_0, \ldots, a_m$ nilpotent sind.

c) Ist A *reduziert*, d. h. ist nur die Null in A nilpotent, und ist $g = b_0 + \cdots + b_nX^n \in A[X]$ mit $fg = 0$, so gilt für alle passenden Indizes i und j: $a_ib_j = 0$.

Aufgabe 2. (2+m) *Lokale Ringe*

a) Zeige, dass ein Ring A genau dann lokal ist, wenn $1 \neq 0$ in A und, wann immer eine Summe aus zwei Elementen invertierbar ist, schon ein Summand invertierbar ist.

b) Was sind die einzigen idempotenten Elemente in einem lokalen Ring?

Aufgabe 3. (4) *Ringe mit nur einem Primideal*

Sei A ein Ring. Sei $\mathfrak{n}$ das Ideal der nilpotenten Elemente in A. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. In A gibt es genau ein Primideal.
2. Jedes Element von A ist *entweder* invertierbar *oder* nilpotent.
3. Der Faktorring $A/\mathfrak{n}$ ist ein Körper.

Hinweis. Verwende für den Teil „1. $\Rightarrow$ 2.“ ohne Beweis folgendes Lemma, das nächste Woche in der Vorlesung bewiesen wird: Der Schnitt über alle Primideale eines Rings besteht nur aus seinen nilpotenten Elementen.

Aufgabe 4. (m+2+2+2) *Boolsche Ringe*

Sei A ein *boolscher Ring*, d. h. ein kommutativer Ring mit $x^2 = x$ für alle $x \in A$. Zeige:

a) Für alle $x \in A$ gilt $2x = 0$.

b) Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist maximal.

c) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist $A/\mathfrak{p}$ ein Körper mit zwei Elementen.

d) Jedes endlich erzeugte Ideal von A ist ein Hauptideal.