Geometrische Vorstellung von Ringen

Sei A ein Ring (wie immer: kommutativ und mit Eins). Dann gibt es einen topologischen Raum, $\operatorname{Spec} A$, mittels dem man sich den Ring anschaulich vorstellen kann. Auf diese Weise haben viele Konzepte und Resultate aus der Algebra eine geometrische Entsprechung; und umgekehrt.

Die folgende Definition stellt das zentrale Bindeglied dar.

$$\boxed{\text{Primideale von } A} \longleftrightarrow \boxed{\text{Punkte von } \operatorname{Spec} A}$$

Die Topologie auf $\operatorname{Spec} A$ definiert man wie folgt: Eine Teilmenge von $\operatorname{Spec} A$ heißt genau dann *abgeschlossen*, wenn sie von der Form $V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \,|\, \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$ ist, wobei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in A ist. Eine Teilmenge heißt genau dann *offen*, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist.

Spiel & Spaß 1. Weise nach, dass diese Festlegungen wirklich eine Topologie auf $\operatorname{Spec} A$ definieren.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Korrespondenz ist folgender.

$$\boxed{\text{Elemente von } A} \longleftrightarrow \boxed{\text{Funktionen auf } \operatorname{Spec} A}$$

Ist f nämlich ein Element von A und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein Punkt, so können wir definieren: Der *Funktionswert* von f an der Stelle $\mathfrak{p}$ ist das Bild von f in $k(\mathfrak{p})$. Dabei ist $k(\mathfrak{p})$ der *Restklassenkörper* an der Stelle $\mathfrak{p}$, das ist der Körper $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.

Sei zum Beispiel $A = \mathbb{R}[X]$ und $f = X^2 - 2X + 3$. Sei $\mathfrak{p} = (X-4)$. Dann ist $k(\mathfrak{p})$ kanonisch zu $\mathbb{R}$ isomorph, vermöge $[g/h] \mapsto g(4)/h(4)$. Unter diesem Isomorphismus ist dann der Funktionswert von f bei $\mathfrak{p}$ gleich dem traditionell definierten Funktionswert $f(4)$.

Spiel & Spaß 2. Was sind die Funktionswerte von $90 \in \mathbb{Z}$ an allen Punkten aus $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$? Wo hat die Funktion Nullstellen? Hat die Funktion auch doppelte Nullstellen?

Im Vergleich zu den in der Differentialgeometrie, komplexen Geometrie oder riemannschen Geometrie untersuchten Räumen hat $\operatorname{Spec} A$ noch eine Besonderheit: Nur in den seltensten Fällen ist $\operatorname{Spec} A$ ein Hausdorffraum. Insbesondere sind einpunktige Mengen $\{\mathfrak{p}\}$ nicht immer abgeschlossen. Punkte $\mathfrak{p}$, für die $\{\mathfrak{p}\}$ doch abgeschlossen ist, heißen *abgeschlossene Punkte*.

$$\boxed{\text{maximale Ideale}} \longleftrightarrow \boxed{\text{abgeschlossene Punkte}}$$

$$\boxed{\text{Ideale, die über } \mathfrak{p} \text{ sitzen}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Punkte aus dem}\\ \text{Abschluss von } \{\mathfrak{p}\}\end{array}}$$

Die abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X,Y]$ sind alle von der Form $(X-z, Y-w)$ mit $z, w \in \mathbb{C}$; die abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X,Y]$ stehen also in kanonischer Eins-zu-Eins-Beziehung zu den Punkten des Vektorraums $\mathbb{C}^2$.

In $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X,Y]$ gibt es aber auch noch nicht-abgeschlossene Punkte. Zum Beispiel ist der Punkt $(Y-X^2)$ nicht abgeschlossen. In seinem Abschluss liegen (er selbst und) alle Punkte der Form $(X-z, Y-w)$ mit $w = z^2$, also alle Punkte der Normalparabel. Wenn man ein Bild von $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X,Y]$ zeichnet, malt man $(Y-X^2)$ als eine Art delokalisierte Punktwolke, als Geisterpunkt, der überall und nirgendwo auf $V((Y-X^2))$ sitzt.

Spiel & Spaß 3. Beweise die letzten beiden Korrespondenzen. Sei also $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Zeige: Der topologische Abschluss von $\{\mathfrak{p}\}$ in $\operatorname{Spec} A$ ist gerade die Menge derjenigen Primideale $\mathfrak{q}$, die über $\mathfrak{p}$ sitzen, also $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$.

Mehrere Aussagen der Algebra haben schon mit diesem kleinen Wörterbuch eine geometrische Bedeutung:

- *Über jedem Primideal $\mathfrak{p}$ gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$.*

  Jeder Punkt enthält einen abgeschlossenen Punkt in seinem Abschluss. Jeder generische Punkt spezialisiert sich zu mindestens einem abgeschlossenen Punkt.

- *Das Primideal $\mathfrak{p}$ ist ein minimales Primideal.*

  Der Abschluss von $\mathfrak{p}$ ist eine irreduzible Komponente von $\operatorname{Spec} A$.

- *Der Ring enthält genau ein minimales Primideal.*

  Der Raum $\operatorname{Spec} A$ ist irreduzibel.

- *Unter jedem Primideal gibt es ein minimales Primideal.*

  Jeder Punkt liegt in irgendeiner irreduziblen Komponente.

- *Der Ring ist lokal.*

  Der Raum $\operatorname{Spec} A$ enthält nur einen einzigen abgeschlossenen Punkt. In jeder offenen Überdeckung von $\operatorname{Spec} A$ ist mindestens eine der überdeckenden Mengen schon ganz $\operatorname{Spec} A$.

Spiel & Spaß 4. Sei $A = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[X,Y]/(XY)$. Überzeuge dich davon, dass $\operatorname{Spec} A$ wie ein Achsenkreuz aussieht. Es besteht aus zwei irreduziblen Komponenten, den beiden Achsen. Zeige, dass A genau zwei minimale Primideale enthält (nämlich $([X])$ und $([Y])$) und erkläre, wie diese mit den Komponenten zusammenhängen.

Spiel & Spaß 5. Seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale. Sei $\mathfrak{q}$ Element einer offenen Teilmenge U. Zeige, dass dann auch $\mathfrak{p}$ Element von U ist. (Offene Mengen enthalten also stets die angesprochenen Geisterpunkte.)

Mit dem geometrischen Raum $\operatorname{Spec} A$ kann man sich auch (beliebige, nicht unbedingt prime) Ideale von A veranschaulichen. Und zwar kann man ein Ideal $\mathfrak{a}$ dadurch visualisieren, indem man die abgeschlossene Menge $V(\mathfrak{a})$ betrachtet. *Anschaulich ist das die Menge derjenigen Punkte, bei denen alle Funktionen aus $\mathfrak{a}$ verschwinden.*

Dabei gelten folgende Rechenregeln:

- $V(0) = \operatorname{Spec} A$. Die Nullfunktion verschwindet an jedem Punkt.

- $V((1)) = \emptyset$. Die Einsfunktion verschwindet nirgendwo.
- $V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b})$. Punkte, bei denen alle Funktionen aus $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ verschwinden, sind genau die, bei denen alle Funktionen aus $\mathfrak{a}$ und alle Funktionen aus $\mathfrak{b}$ verschwinden.
- $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Die Geometrie ist aber *blind bezüglich Nilpotenz*: Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ gilt $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$. Der Unterschied zwischen $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ist geometrisch also nicht sichtbar. Und wenn eine Funktion $f \in A$ an allen Punkten verschwindet, heißt das nicht, dass $f = 0$; es heißt nur, dass f nilpotent ist.

Spiel & Spaß 6. Was ist $V(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ geometrisch?

Spiel & Spaß 7. Mengen der Form $D(f) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ mit $f \in A$ heißen auch *standardoffen.*

a) Zeige: Jede offene Menge von $\operatorname{Spec} A$ ist Vereinigung standardoffener Teilmengen.

b) Zeige, dass genau dann $D(f) \subseteq D(g)$, wenn $f \in \sqrt{(g)}$. Zeige allgemeiner, dass genau dann $D(f) \subseteq \bigcup_i D(g_i)$, wenn $f \in \sqrt{(g_i)_i}$.

c) Folgere: Der Raum $\operatorname{Spec} A$ ist stets kompakt.

d) Zeige: Der Rahmen der offenen Mengen in $\operatorname{Spec} A$ ist isomorph zum Rahmen der Wurzelideale in A.

Spiel & Spaß 8.

a) Zeige: Eine offene Teilmenge U von $\operatorname{Spec} A$ ist genau dann dicht, wenn $\bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in U} \mathfrak{p} = \sqrt{(0)}$.

b) Besitze A nur endlich viele minimale Primideale. Zeige, dass eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spec} A$ genau dann dicht ist, wenn sie all diese enthält.

Spiel & Spaß 9. Zeige: Eine offene Teilmenge ist genau dann (nicht nur offen, sondern auch) abgeschlossen, wenn sie von der Form $D(e)$ mit $e^2 = e$ ist.

Schließlich sei noch bemerkt, dass man auch Moduln veranschaulichen kann. Und zwar stellt man sich einen A-Modul M als eine Art verallgemeinertes Vektorbündel über $\operatorname{Spec} A$ vor. Man visualisiert M als Ansammlung seiner Halme $M_{\mathfrak{p}}$: „Über $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ sitzt $M_{\mathfrak{p}}$." Eine Skizze würde hier viel helfen.

Dazu passt, dass man den *Träger* von M als Menge derjenigen Primideale $\mathfrak{p}$ definiert, sodass der Halm $M_{\mathfrak{p}}$ nicht Null ist.

Spiel & Spaß 10.

a) Rechne nach, dass der Träger des A-Moduls $A/\mathfrak{a}$ genau $V(\mathfrak{a})$ ist.

b) Zeige allgemeiner: Der Träger eines endlich erzeugten Moduls M ist $V(\operatorname{ann} M)$.

Spiel & Spaß 11. Sei $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen k-Vektorraums. Dann wird V mittels der Skalarmultiplikation $f \bullet x := f(\phi)x$ zu einem $k[X]$-Modul, den man zur besseren Unterscheidung dann auch mit „V_ϕ“ bezeichnet.

In der linearen Algebra zeigt man: Genau dann ist V_ϕ zu einem weiteren $k[X]$-Modul der Form $V_{\phi'}$ isomorph, wenn die Endomorphismen ϕ und ϕ' zueinander ähnlich sind. Der Modul V_ϕ kodiert also den *Ähnlichkeitstyp* von ϕ.

Außerdem lernt man: Als $k[X]$-Modul ist V_ϕ isomorph zu $k[X]/(d_1) \oplus \cdots \oplus k[X]/(d_r)$, wobei die Polynome d_i gewisse Polynome sind, deren Produkt das charakteristische Polynom von ϕ ergibt. (Das Polynom d_r ist das Minimalpolynom von ϕ.)

Erkläre, inwieweit V_ϕ eine Verallgemeinerung des klassischen Spektrums von ϕ – der Menge der Eigenwerte – darstellt. Denke dazu an den Träger von V_ϕ!