

Übungsblatt 0 zur Kommutativen Algebra

Präsenzblatt für die erste Übung

Aufgabe 1. Geometrische Reihe in der Algebra

- a) Sei x ein nilpotentes Element eines kommutativen Rings A . Zeige, dass $1 - x$ eine Einheit ist.
- b) Folgere: Die Summe eines nilpotenten Elements mit einer Einheit ist wieder eine Einheit.

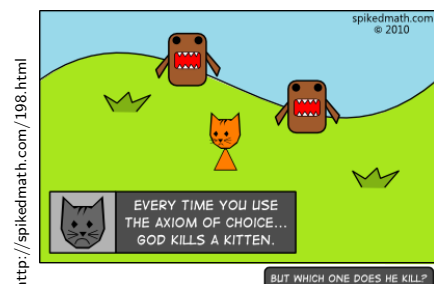
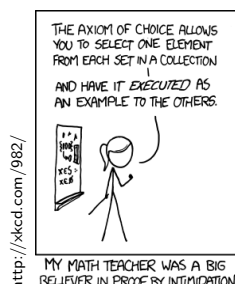
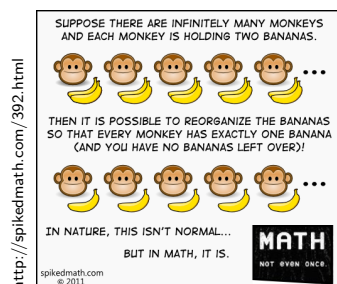
Aufgabe 2. Idealkarten wichtiger Ringe

Zeichne für die folgenden Ringe eine Übersicht über ihre Ideale. Welche sind maximal, welche prim?

- a) $\mathbb{Z}$
- b) k (dabei ist k ein beliebiger Körper)
- c) $\mathbb{C}[X]$
- d) $\mathbb{R}[X]$

Aufgabe 3. Existenz minimaler Primideale

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem kommutativen Ring. Zeige, dass es unter den Primidealen $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ ein minimales gibt.



Übungsblatt 1 zur Kommutativen Algebra

Kummerkasten auf algebra.speicherleck.de

Aufgabe 1. (m+2+2) *Invertierbarkeit und Nilpotenz in Polynomringen*

Sei A ein Ring. Sei $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m \in A[X]$ ein Polynom über A . Zeige:

- Genau dann ist f eine Einheit in $A[X]$, wenn a_0 in A invertierbar und die $a_1, \dots, a_m$ nilpotent sind.
- Genau dann ist f nilpotent, wenn $a_0, \dots, a_m$ nilpotent sind.
- Ist A *reduziert*, d. h. ist nur die Null in A nilpotent, und ist $g = b_0 + \cdots + b_nX^n \in A[X]$ mit $fg = 0$, so gilt für alle passenden Indizes i und j : $a_ib_j = 0$.

Aufgabe 2. (2+m) *Lokale Ringe*

- Zeige, dass ein Ring A genau dann lokal ist, wenn $1 \neq 0$ in A und, wann immer eine Summe aus zwei Elementen invertierbar ist, schon ein Summand invertierbar ist.
- Was sind die einzigen idempotenten Elemente in einem lokalen Ring?

Aufgabe 3. (4) *Ringe mit nur einem Primideal*

Sei A ein Ring. Sei $\mathfrak{n}$ das Ideal der nilpotenten Elemente in A . Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

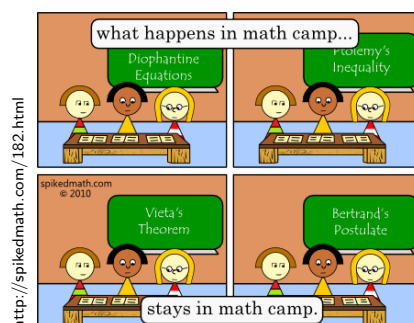
- In A gibt es genau ein Primideal.
- Jedes Element von A ist *entweder* invertierbar *oder* nilpotent.
- Der Faktorring $A/\mathfrak{n}$ ist ein Körper.

Hinweis. Verwende für den Teil „1. $\Rightarrow$ 2.“ ohne Beweis folgendes Lemma, das nächste Woche in der Vorlesung bewiesen wird: Der Schnitt über alle Primideale eines Rings besteht nur aus seinen nilpotenten Elementen.

Aufgabe 4. (m+2+2+2) *Boolsche Ringe*

Sei A ein *boolscher Ring*, d. h. ein kommutativer Ring mit $x^2 = x$ für alle $x \in A$. Zeige:

- Für alle $x \in A$ gilt $2x = 0$.
- Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist maximal.
- Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist $A/\mathfrak{p}$ ein Körper mit zwei Elementen.
- Jedes endlich erzeugte Ideal von A ist ein Hauptideal.



Übungsblatt 2 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+2+1) *Invertierbarkeit und Nilpotenz in Ringen formaler Potenzreihen*

Sei A ein Ring. Sei $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots \in A[[X]]$ eine formale Potenzreihe. Zeige:

- a) Genau dann ist f eine Einheit in $A[[X]]$, wenn a_0 in A invertierbar ist.
- b) Ist f nilpotent, so sind alle Koeffizienten $a_0, a_1, \dots$ nilpotent.
- c) Gilt in b) die Umkehrung? (Es genügt ein plausibles Argument.)

Aufgabe 2. (2+m) *Nilradikal und Jacobsonisches Radikal*

Sei A ein Ring. Zeige:

- a) Jacobsonisches Radikal und Nilradikal von $A[X]$ stimmen miteinander überein.
- b) Genau dann liegt eine Potenzreihe f im Jacobsonischen Radikal von $A[[X]]$, wenn $f(0)$ im Jacobsonischen Radikal von A liegt.

Aufgabe 3. (m) *Charakterisierung von Wurzelidealen*

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Rings. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ genau dann mit seinem Wurzelideal übereinstimmt, wenn $\mathfrak{a}$ ein Schnitt von Primidealen ist.

Aufgabe 4. (3+1) *Inhalt von Polynomen*

Sei A ein Ring. Der *Wurzelinhalt* eines Polynoms $f = a_0 + \dots + a_mX^m \in A[X]$ ist das Ideal $J(f) := \sqrt{(a_0, \dots, a_m)}$.

- a) Zeige für alle Polynome $f, g \in A[X]$: $J(fg) = J(f) \cap J(g)$.
- b) Ein Polynom heißt genau dann *primitiv*, wenn sein Wurzelinhalt das Einsideal ist.
Folgere: Genau dann ist ein Produkt fg primitiv, wenn f und g es sind.

Aufgabe 5. (2+2+1) *Ideale bestehend aus Nullteilern*

- a) Sei I ein Ideal eines Rings, das nur Nullteiler enthält. Zeige, dass es in der Partialordnung all derjenigen Ideale, die I umfassen und nur Nullteiler enthalten, ein maximales Element gibt.
- b) Zeige, dass ein maximales Element wie in a) stets ein Primideal ist.
- c) Folgere: Die Menge der Nullteiler eines Rings ist eine Vereinigung von Primidealen.

Was bildet eine abelsche Gruppe unter Addition, einen Monoid unter Multiplikation, erfüllt ein Distributivgesetz und ist verflucht?

Übungsblatt 3 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2+2) *Der formale Potenzreihenring über dem Grundring*

Sei A ein Ring.

- a) Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $A[[X]]$, so gilt $X \in \mathfrak{m}$, die Kontraktion $\mathfrak{m}_0 := A \cap \mathfrak{m}$ ist ein maximales Ideal in A und $\mathfrak{m}$ ist das von $\mathfrak{m}_0$ und X in $A[[X]]$ erzeugte Ideal.
- b) Jedes Primideal von A ist Kontraktion eines Primideals von $A[[X]]$.

Aufgabe 2. (2+m+m+2) *Rechnungen mit Idealen*

- a) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Rings A . Finde einen Isomorphismus $A[X]/\mathfrak{a}[X] \rightarrow (A/\mathfrak{a})[X]$.
- b) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines Rings A . Zeige, dass dann auch $\mathfrak{p}[X]$ in $A[X]$ prim ist.
- c) Gilt die analoge Behauptung von b) auch für maximale Ideale?
- d) Untersuche folgende Ideale auf Primalität und Maximalität: $(2, X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ und $([2], [X])$ in $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 6)$.

Aufgabe 3. (2+1) *Nichtbeispiele für Hauptidealbereiche*

- a) Sei A ein Ring derart, dass jedes endlich erzeugte Ideal von $A[X]$ ein Hauptideal ist. Zeige, dass jedes reguläre Element von A schon invertierbar ist.
- b) Folgere: $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X, Y]$ sind keine Hauptidealbereiche.

Aufgabe 4. (m+2) *Ein radikales Distributivgesetz*

- a) Zeige, dass die Rechenregel „ $\mathfrak{a} \cap \sum_i \mathfrak{b}_i = \sum_i (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_i)$ “ für Ideale im Allgemeinen *nicht* gilt. *Hinweis.* In den Ringen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}[X]$ wirst du kein Gegenbeispiel finden.
- b) Zeige, dass folgende Regel durchaus stets gilt: $\sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\sum_i \mathfrak{b}_i} = \sqrt{\sum_i (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}_i)}$.

Aufgabe 5. (2+1+0) *Der Darstellungssatz von Stone*

Sei A ein boolscher Ring. Sei $\text{Spec } A$ die Menge der Primideale von A . Die Potenzmenge von $\text{Spec } A$ bildet mit der symmetrischen Differenz als Addition und dem Schnitt als Multiplikation ebenfalls einen boolschen Ring.

- a) Gib explizit einen Ringhomomorphismus $A \rightarrow \mathcal{P}(\text{Spec } A)$ an.
- b) Zeige, dass dieser injektiv ist.
- c) Zeige, dass der Morphismus Teil einer natürlichen Transformation $\text{Id} \Rightarrow \mathcal{P} \circ \text{Spec}$ ist und dass es nur eine solche Transformation gibt.

A friend told me that Obama became a communist after he became president, but I told him that couldn't be so. If you're a member of a radical ideal after being raised to a power, then you must have been part of it from the beginning.

Übungsblatt 4 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+2+m) *Endliche Erzeugung bei Moduln*

- a) Finde ein Erzeugendensystem eines Moduls, sodass keine Teilfamilie eine Basis ist. Finde eine linear unabhängige Familie in einem Modul, sodass keine Erweiterung eine Basis ist.
- b) Sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Moduln. Zeige: Sind die beiden äußeren Moduln M' und M'' endlich erzeugt, so auch der mittlere.
- c) Sei M ein endlich erzeugter A -Modul. Sei $\varphi : M \rightarrow A^n$ eine surjektive lineare Abbildung. Zeige, dass der Kern von φ endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2. (2+m) *Erste Schritte mit exakten Sequenzen*

- a) Sei M ein A -Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A . Zeige: $M \otimes_A A/\mathfrak{a} \cong M/\mathfrak{a}M$.
- b) Seien M und N flache A -Moduln. Zeige, dass auch $M \otimes_A N$ flach über A ist.

Aufgabe 3. (2+m+2) *Nullteiler beim Tensorprodukt*

Sei $(A, \mathfrak{m}, k)$ ein lokaler Ring.

- a) Zeige, dass $\mathbb{Z}/(2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(3) = 0$.
- b) Sei P ein endlich erzeugter Modul über A . Zeige: Ist $P \otimes_A k = 0$, so auch $P = 0$.
- c) Zeige: Für endlich erzeugte A -Moduln M und N folgt aus $M \otimes_A N = 0$ schon $M = 0$ oder $N = 0$.

Aufgabe 4. (2+2+2) *Surjektivität von linearen Abbildungen*

- a) Seien M und N Moduln über einem Ring A . Sei N endlich erzeugt. Sei $\mathfrak{a}$ ein im Jacobson'schen Radikal enthaltenes Ideal von A . Sei $\varphi : M \rightarrow N$ eine A -lineare Abbildung. Zeige: Ist die induzierte Abbildung $M/\mathfrak{a}M \rightarrow N/\mathfrak{a}N$ surjektiv, so auch φ .
- b) Sei A ein Ring mit $1 \neq 0$. Sei $A^m \rightarrow A^n$ eine lineare Surjektion. Zeige, dass $m \geq n$.
- c) Sei M eine $(n \times m)$ -Matrix über einem lokalen Ring, welche aufgefasst als lineare Abbildung surjektiv ist. Zeige, dass M äquivalent zu einer (rechteckigen) Diagonalmatrix mit genau n Einsen auf der Hauptdiagonale ist.



Übungsblatt 5 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2+m) *Beispiele für gerichtete Limiten*

- a) Sei A ein Ring. Zeige, dass $A[X]$ als A -Modul kanonisch isomorph zum gerichteten Limes des Systems $A[X]_{\leq 0} \hookrightarrow A[X]_{\leq 1} \hookrightarrow A[X]_{\leq 2} \cdots$ ist. Dabei ist $A[X]_{\leq n}$ der Modul der Polynome vom Grad $\leq n$.
- b) Sei M ein A -Modul. Sei $f \in A$. Zeige, dass $M[f^{-1}]$ kanonisch isomorph zum gerichteten Limes des Systems $M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} \cdots$ ist.

Aufgabe 2. (2+m+2+2) *Gesättigte multiplikativ abgeschlossene Mengen*

Eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge S eines Rings A heißt genau dann *gesättigt*, wenn aus $xy \in S$ schon $x \in S$ und $y \in S$ folgt.

- a) Seien $f, x \in A$. Zeige: Genau dann ist $x/1 \in A[f^{-1}]$ invertierbar, wenn $f \in \sqrt{(x)}$.
- b) Sei $S \subseteq A$ eine gesättigte multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Zeige: Für $x \in A$ ist genau dann $x/1 \in S^{-1}A$ invertierbar, wenn x in S liegt. Folgere, dass $S^{-1}A$ genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $0 \notin S$ und aus $x + y \in S$ schon $x \in S$ oder $y \in S$ folgt.
- c) Sei $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Zeige, dass es eine kleinste gesättigte, multiplikativ abgeschlossene und S umfassende Teilmenge gibt (die *Sättigung* von S).
- d) Seien S und T multiplikativ abgeschlossene Mengen mit $S \subseteq T$. Zeige, dass $S^{-1}A \rightarrow T^{-1}A$, $a/s \mapsto a/s$ genau dann bijektiv ist, wenn T in der Sättigung von S liegt.

Aufgabe 3. (2+m+2) *Lokale Eigenschaften*

- a) Zeige: Sind alle Halme eines Rings reduziert, so ist auch der Ring selbst reduziert.
- b) Zeige oder widerlege: Sind alle Halme Integritätsbereiche, so auch der Ring selbst.
- c) Sei M ein A -Modul. Gelte $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für all diejenigen maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A , die über einem bestimmten Ideal $\mathfrak{a}$ liegen. Zeige: $M = \mathfrak{a}M$.

Aufgabe 4. (2+m) *Injektivität von linearen Abbildungen*

- a) Sei A ein lokaler Ring. Sei $A^m \rightarrow A^n$ eine lineare Injektion. Zeige, dass $m \leq n$.
- b) Folgere die Behauptung für beliebige Ringe A mit $1 \neq 0$.

Aufgabe 5. (m) *Topologischer Abschluss von Punkten*

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines Rings A . Zeige, dass in $\text{Spec } A$ gilt: $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$.

Wofür steht das „B.“ in „Benoît B. Mandelbrot“?

Übungsblatt 6 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2+m+2) Ein konkretes Beispiel für eine Primärzerlegung

Sei K ein Körper. Seien die Ideale $\mathfrak{p}_1 = (X, Y)$, $\mathfrak{p}_2 = (X, Z)$ und $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$ von $K[X, Y, Z]$ gegeben. Sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$.

- Zeige, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$ eine minimale Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$ ist.
- Welche Primideale von $K[X, Y, Z]$ sind zu $\mathfrak{a}$ isolierte Primideale, welche eingebettete?
- Schreibe die assoziierten Primideale in der Form $\sqrt{(\mathfrak{a} : f)}$ für geeignete $f \in K[X, Y, Z]$.

Aufgabe 2. (2+m+2) Erweiterungen primärer Ideale in Polynomringen

Sei A ein Ring.

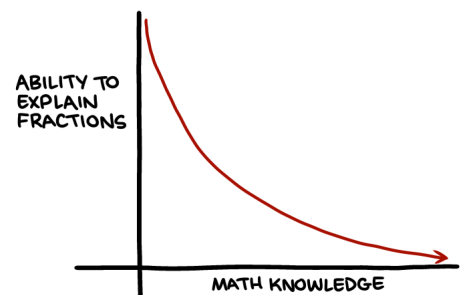
- Sei $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$ -primäres Ideal in A . Zeige, dass $\mathfrak{q}[X]$ ein $\mathfrak{p}[X]$ -primäres Ideal in $A[X]$ ist.
- Sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ eine minimale Primärzerlegung in A . Zeige, dass $\mathfrak{a}[X] = \mathfrak{q}_1[X] \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n[X]$ eine minimale Primärzerlegung in $A[X]$ ist.
- Zeige: Ist $\mathfrak{p}$ ein zu einem zerlegbaren Ideal $\mathfrak{a}$ isoliertes Primideal, so ist $\mathfrak{p}[X]$ ein zu $\mathfrak{a}[X]$ isoliertes Primideal.

Aufgabe 3. (2+m) Ein Kriterium für Assoziiertheit

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Rings A . Sei $\mathfrak{p}$ ein Ideal, das unter allen Idealen der Form $(\mathfrak{a} : x)$ mit $x \in A$ und $x \notin \mathfrak{a}$ maximal ist. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, und dass dieses außerdem zu $\mathfrak{a}$ assoziiert ist, wenn $\mathfrak{a}$ zerlegbar sein sollte.

Aufgabe 4. (0+2+2+m) Erste Schritte mit ganzen Erweiterungen

- Seien x und y Elemente eines Rings, die vermöge der Gleichungen $x^2 - 3x + 1 = 0$ und $y^2 + 5y - 2 = 0$ über $\mathbb{Z}$ ganz sind. Finde eine Ganzheitsgleichung für $x + y$.
- Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung. Sei x ein Element von A , das in B invertierbar ist. Zeige, dass x schon in A invertierbar ist.
- Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung. Sei C der ganze Abschluss von A in B . Seien $f, g \in B[X]$ normierte Polynome mit $fg \in C[X]$. Zeige, dass $f \in C[X]$ und $g \in C[X]$.
- Sei G eine endliche Gruppe von Automorphismen eines Rings A . Zeige, dass A über dem Unterring A^G der G -Invarianten, also $\{x \in A \mid g(x) = x \text{ für alle } g \in G\}$, ganz ist.



Übungsblatt 7 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (4) *Ein konkretes Beispiel zur Noether-Normalisierung*

Sei K ein Körper. Gib eine Zahl $r \geq 0$ und einen endlichen, injektiven K -Algebren-Homomorphismus $K[Y_1, \dots, Y_r] \rightarrow K[A, B]/(AB - 1)$ an.

Aufgabe 2. (3) *Oberringe von Bewertungsringen*

Sei A ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K . Sei $A \subseteq B \subseteq K$ eine Zwischenerweiterung. Finde ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A mit $B \cong A_{\mathfrak{p}}$.

Aufgabe 3. (m) *Noether-Normalisierung für Integritätsbereiche*

Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei B als A -Algebra endlich erzeugt. Zeige, dass ein Element $s \in A \setminus \{0\}$ und eine A -Algebra $B' \subseteq B$ mit $B' \cong A[Y_1, \dots, Y_n]$ existieren, sodass $B[s^{-1}]$ ganz über $B'[s^{-1}]$ ist.

Aufgabe 4. (2) *Matrizen über Bewertungsringen*

Sei M eine Matrix über einem Bewertungsring. Zeige, dass M äquivalent zu einer (rechteckigen) Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 5. (3+m) *Geschenkte Bijektivität*

Sei $\varphi : M \rightarrow M$ ein Endomorphismus eines Moduls M . Zeige:

- a) Ist φ surjektiv und M noethersch, so ist φ bijektiv.
- b) Ist φ injektiv und M artinsch, so ist φ bijektiv.

Aufgabe 6. (m+3+2) *Endlichkeit minimaler Primideale*

- a) Sei A ein Ring, in dem das Nilradikal Schnitt endlich vieler Primideale ist. Zeige, dass A nur endlich viele minimale Primideale besitzt.
- b) Zeige: Das Nilradikal eines artinschen Rings ist endlicher Schnitt von Primidealen.
- c) Zeige die Behauptung aus b) auch für noethersche Ringe.

Tipp. Führe die Betrachtung eines Wurzelideals, das maximal mit der Eigenschaft ist, nicht endlicher Schnitt von Primidealen zu sein, (wieso existiert ein solches?) zu einem Widerspruch. Oder verwende das Induktionsprinzip vom nächsten Blatt, um allgemeiner zu zeigen, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ das Ideal $\sqrt{\mathfrak{a}}$ endlicher Schnitt von Primidealen ist.

Frisch von Topos à l'IHÉS in Bures-sur-Yvette:

Let $\mathcal{C}$ be a category. Let $X, Y \in \mathcal{C}$ be objects. Assume that the induced representable presheaves $\text{Hom}(\cdot, X)$ and $\text{Hom}(\cdot, Y)$ are naturally isomorphic. Then how do you prove that X and Y are themselves isomorphic? You need a lemma for that.

Übungsblatt 8 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (3) Nilpotenz von Potenzreihen über noetherschen Ringen

Seien $a_0, a_1, \dots$ nilpotente Elemente in einem noetherschen Ring. Zeige, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ nilpotent ist.

Aufgabe 2. (m) Die teilweise Obsoleszenz eines Teilgebiets der Mathematik

Sei R ein noetherscher Ring. Seien A eine endlich erzeugte R -Algebra und G eine endliche Gruppe von R -Algebrenautomorphismen von A . Zeige, dass die A -Algebra A^G der G -Invarianten (siehe Blatt 6, Aufgabe 4) endlich erzeugt ist.

Aufgabe 3. (m) Noethersche Induktion für noethersche Moduln

Sei M ein noetherscher Modul. Sei für jeden Untermodul U eine Behauptung $\varphi(U)$ gegeben. Gelte für alle Untermoduln U :

Wenn $\varphi(U')$ für alle Untermoduln $U' \supsetneq U$ stimmt, dann stimmt auch $\varphi(U)$.

Zeige, dass $\varphi(U)$ für alle Untermoduln U stimmt.

Aufgabe 4. (3) Lokalität der Noetherianität

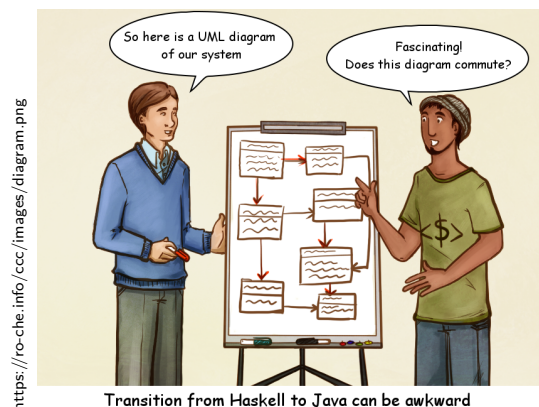
Zeige oder widerlege: Sind alle Halme eines Rings noethersch, so auch der Ring selbst.

Aufgabe 5. (m+3+3) Ein Kriterium für Noetherianität

- Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Rings A und sei $x \in A$. Sei $\mathfrak{a} + (x)$ endlich erzeugt. Zeige, dass es ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} + (x) = \mathfrak{a}_0 + (x)$ gibt.
- Sei $\mathfrak{p}$ ein Ideal, das maximal mit der Eigenschaft ist, nicht endlich erzeugt zu sein. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist.
- Zeige, dass ein Ring, in dem alle Primideale endlich erzeugt sind, noethersch ist.

Aufgabe 6. (3) Ein konkretes Beispiel für die Länge

Was ist die Länge des $\mathbb{Z}$ -Moduls $\mathbb{Z}/(90)$?



Übungsblatt 9 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2) *Ganz, endlich und von endlichem Typ*

Sei $A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass B genau dann endlich über A ist, wenn B von endlichem Typ und ganz über A ist.

Aufgabe 2. (2+m) *Anwendungen der Noether-Normalisierung*

- a) Sei A eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper K und sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A . Zeige, dass $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Erweiterung von K ist.
- b) Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus endlich erzeugter Algebren über einem Körper. Zeige, dass das Urbild eines maximalen Ideals unter ϕ wieder maximal ist.

Aufgabe 3. (2) *Lokalität der Noetherianität, verfeinert*

Sei A ein Ring, dessen Halme alle noethersch sind. Gelte außerdem, dass jedes Element $x \in A \setminus \{0\}$ nur in endlich vielen maximalen Idealen liegt. Zeige, dass A noethersch ist.

Aufgabe 4. (2) *Ein schlimmes Ideal*

Finde ein Beispiel für ein Ideal $\mathfrak{a}$, sodass für kein $n \geq 0$ die Inklusion $(\sqrt{\mathfrak{a}})^n \subseteq \mathfrak{a}$ gilt.

Aufgabe 5. (m+1+m+1+m+1+1+1) *Großer Tag der Gegenbeispiele*

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Kurze Begründung oder Gegenbeispiel!

1. Das Bild eines Ideals unter einem Ringhomomorphismus ist ein Ideal.
2. Untermoduln endlich erzeugter Moduln sind endlich erzeugt.
3. Unterringe noetherscher Ringe sind noethersch.
4. Sind alle Halme eines Moduls endlich erzeugt, so auch der Modul selbst.
5. Wenn ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$ surjektiv ist, so folgt für jeden Ring C und je zwei Ringhomomorphismen $\alpha, \beta : B \rightarrow C$ aus $\alpha \circ \varphi = \beta \circ \varphi$ schon $\alpha = \beta$.
6. Es gilt die Umkehrung von 5.
7. Ein normiertes Polynom vom Grad n über einem Ring hat höchstens n Nullstellen.
8. Seien $f, g, h \in K[X, Y]$ Polynome. Dann gilt $(f, g) \cap (h) = (\text{kgV}(f, h), \text{kgV}(g, h))$.

Wenn ein Ring nicht noethersch ist:
<http://tiny.cc/no-no-noether>

Übungsblatt 10 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+m+1+1) *Erste Schritte mit der Dimension von Ringen*

Bestimme für die folgenden Ringe ihre Dimension. Dabei ist K ein Körper.

- a) K
- b) $K[X]$
- c) $\mathbb{Z}/(90)$
- d) $K[X, Y]/(XY)$

Aufgabe 2. (3) *Beispiel für den Struktursatz artinscher Ringe*

Schreibe den artischen Ring $\mathbb{Z}/(90)$ als Produkt artinscher lokaler Ringe. Gib also artinsche lokale Ringe $A_1, \dots, A_n$ und einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/(90) \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n$ an.

Aufgabe 3. (m+2+3+m) *Artinität über einem Körper*

- a) Seien R ein Ring und M ein einfacher R -Modul. Zeige, dass M isomorph zu einem R -Modul der Form $R/\mathfrak{m}$ ist, wobei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in R ist.

Sei im Folgenden A eine endlich erzeugte lokale Algebra über einem Körper K . Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A .

- b) Sei $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M_n = 0$ eine Kompositionsreihe eines A -Moduls M . Zeige, dass M als K -Vektorraum von Dimension $\dim_K M = n \cdot \dim_K(A/\mathfrak{m})$ ist.
- c) Zeige, dass A genau dann als Ring artinsch ist, wenn A als K -Vektorraum endlich dimensional ist. Zeige weiter, dass in diesem Fall $\dim_K A = \ell(A) \cdot \dim_K(A/\mathfrak{m})$ gilt.
- d) Zeige den ersten Teil der Behauptung aus Teilaufgabe c) auch für den Fall, dass A nicht lokal ist.

Aufgabe 4. (2+m+2+0) *Eine elementare Charakterisierung der Dimension*

Für ein Ringelement $x \in A$ sei $\mathfrak{b}_x$ das Ideal $(x) + (\sqrt{(0)} : x)$.

- a) Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal. Sei $x \in A$. Zeige, dass $\mathfrak{b}_x \not\subseteq \mathfrak{p}$.
- b) Sei $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ eine echte Inklusion von Primidealen. Sei $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$. Zeige, dass $\mathfrak{b}_x \subseteq \mathfrak{q}$.
- c) Zeige für $n \geq 0$: Genau dann gilt $\dim A \leq n$, wenn $\dim A/\mathfrak{b}_x \leq n-1$ für alle $x \in A$.
- d) Folgere: Ein Ring ist genau dann von Dimension $\leq n$, wenn für je $n+1$ Ringelemente $x_0, \dots, x_n$ eine Zahl $r \geq 0$ mit

$$(x_0 \cdots x_n)^r \in (x_0 \cdots x_{n-1})^r (x_n^{r+1}) + (x_0 \cdots x_{n-2})^r (x_{n-1}^{r+1}) + \dots + (x_0)^r (x_1^{r+1}) + (x_0^{r+1})$$

existiert.

Übungsblatt 11 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2+m) *Rechenregeln für Ideale in dedekindschen Bereichen*

Bestätige folgende Rechenregeln für Ideale in einem dedekindschen Bereich.

- a) $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$.
- b) $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$.

Aufgabe 2. (3) *Inhalt von Polynomen über dedekindschen Bereichen*

Sei A ein Ring. Der *Inhalt* eines Polynoms $f = a_0 + \dots + a_m X^m \in A[X]$ ist das Ideal $\text{cont}(f) := (a_0, \dots, a_m)$. Zeige, dass im Fall dass A ein dedekindscher Bereich ist, die Rechenregel $\text{cont}(fg) = \text{cont}(f) \cdot \text{cont}(g)$ für Polynome f und g über A gilt.

Aufgabe 3. (m+2) *Chinesischer Restsatz in dedekindschen Bereichen*

Seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ Ideale in einem Ring A .

- a) Zeige, dass die untenstehende Sequenz von A -Moduln genau dann exakt ist (wie sehen die Abbildungen aus?), wenn für alle $x_1, \dots, x_n \in A$ folgendes gilt: Das System $x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{a}_i}, i = 1, \dots, n$ besitzt eine Lösung $x \in A$, falls $x_i \equiv x_j \pmod{\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j}$ für alle i, j .

$$A \longrightarrow \bigoplus_i A/\mathfrak{a}_i \longrightarrow \bigoplus_{i < j} A/(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j).$$

- b) Zeige, dass diese Sequenz exakt ist, falls A ein dedekindscher Bereich ist.

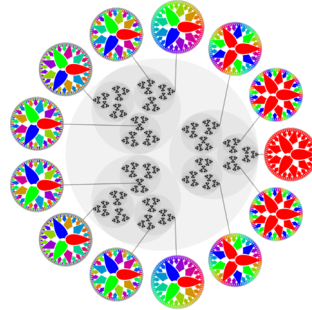
Aufgabe 4. (m) *Fit mit topologischen Räumen? Hausdorff macht Spaß*

Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass X genau dann hausdorffsch ist, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ von $X \times X$ abgeschlossen ist.



August Möbius found a lot of applications for his discoveries.

Übungsblatt 12 zur Kommutativen Algebra



Aufgabe 1. (m+m+2+1+1) *Spiel und Spaß mit p -adischen Zahlen*

Sei $\mathbb{Z}_p$ der Ring der p -adischen Ganzzahlen, konstruierbar als $\varprojlim_n \mathbb{Z}/(p^n)$ oder Vervollständigung von $\mathbb{Z}$ bezüglich der (p) -adischen Topologie.

- Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom, das modulo p eine einfache Nullstelle besitzt. Zeige, dass f in $\mathbb{Z}_p$ eine Nullstelle besitzt.
- Sei n eine zu p teilerfremde ganze Zahl. Zeige, dass n in $\mathbb{Z}_p$ invertierbar ist.
- Berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+p^n}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{1+p^n}$ in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{Z}_p$.
- Seien x und y ganze Zahlen. Finde eine Folge p -adischer Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen x und in $\mathbb{Z}_p$ gegen y konvergiert.
- Gibt es in $\mathbb{Z}_{13}$ eine Quadratwurzel aus -1 ?

Aufgabe 2. (3+m+3+1) *Hensels Lemma*

Sei A ein Ring. Sei $f \in A[X]$ ein Polynom, das modulo einem Ideal $\mathfrak{a}$ eine einfache Nullstelle besitzt: ein Element $x_1 \in A$ mit $f(x_1) \equiv 0$ modulo $\mathfrak{a}$, sodass es ein Element $y \in A$ mit $f'(x_1)y \equiv 1$ modulo $\mathfrak{a}$ gibt. Wir definieren für $n \geq 1$: $x_{n+1} := x_n - yf(x_n)$.

- Zeige für alle $n \geq 1$, dass $x_n \equiv x_m \pmod{\mathfrak{a}^m}$ für alle $m < n$ und dass $f(x_n) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}^n}$.
- Zeige, dass $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge bezüglich der $\mathfrak{a}$ -adischen Topologie ist.
- Sei A vollständig bezüglich dieser Topologie. Zeige, dass f eine Nullstelle in A besitzt.
- Unter welchem Namen ist das Konstruktionsverfahren für die x_n bekannt? Bewundere die Einheit der Mathematik.

Aufgabe 3. (2) *Regularität unter Vervollständigung*

Sei x ein reguläres Element in einem noetherschen Ring A . Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A . Zeige, dass das Bild von x unter dem kanonischen Homomorphismus $A \rightarrow \hat{A}_{\mathfrak{a}}$ regulär ist.

Aufgabe 4. (m) *Potenzreihenentwicklung der Quadratwurzel*

Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$. Zeige: Es gibt eine Potenzreihe $p \in K[[X]]$ mit $p^2 = 1 + X$.

Übungsblatt 13 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+2) *Ein Erstsemestertraum wird wahr*

Sei ein Ring A mit der adischen Topologie bezüglich einem Ideal $\mathfrak{a}$ versehen. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in A . Sei $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$. Zeige: Genau dann ist $(s_n)_n$ eine Cauchy-Folge, wenn $(x_n)_n$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 2. (3) *Abgeschlossenheit maximaler Ideale*

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem Ring A . Zeige, dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A genau dann abgeschlossen bezüglich der $\mathfrak{a}$ -adischen Topologie auf A ist, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

Aufgabe 3. (m) *Vervollständigung an maximalen Idealen*

Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in einem Ring A . Zeige, dass die Vervollständigung von A bezüglich der $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 4. (2+m) *Analytische Umgebungen*

Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$.

- Zeige: $K[[X, Y]]/(Y^2 - X^2) \cong K[[X, Y]]/(Y^2 - X^2 - X^3)$.
- Zeige: $K[X, Y]/(Y^2 - X^2) \not\cong K[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3)$.

Aufgabe 5. (2+2) *Nichtexaktheit der inversen Limesbildung*

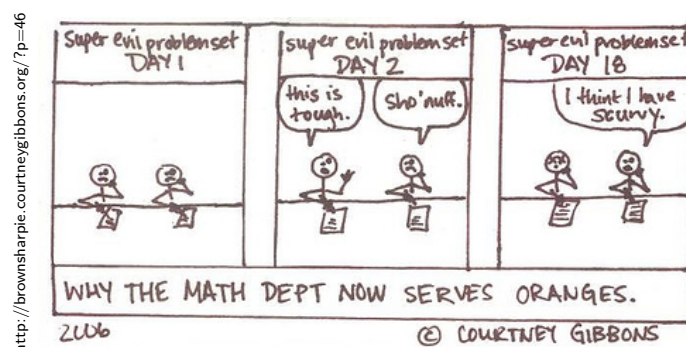
Das Diagramm zeigt in seinen drei Spalten drei inverse Systeme $A_\bullet$, $B_\bullet$ und $C_\bullet$ und horizontal die Komponenten einer kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$.

- Bestimme die inversen Limiten der drei Systeme.
- Ist $\varprojlim_n^1 A_n = 0$? Beschreibe $\varprojlim_n^1 A_n$ so gut wie möglich!

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow p & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{p^3} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(p^3) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow p & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{p^2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(p^2) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow p & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(p) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Aufgabe 6. (0) *Die 10-adischen Zahlen*

Finde ein Element $x \in \mathbb{Z}_{10}$, das weder Null noch Eins ist, aber trotzdem die Identität $x^2 = x$ erfüllt. Kann ein Grundschulkind die ersten paar Ziffern von x bestimmen?



Übungsblatt 14 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (2) *Ein Gegenbeispiel zu einer Verstärkung des Krullschen Satzes*

Finde einen noetherschen Ring zusammen mit einem Ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ mit $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n \neq (0)$.

Aufgabe 2. (m+2+2) *Endlichkeitsaussagen mit dem Kind aller Korrespondenzsätze*

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines Rings A . Sei $k(\mathfrak{p}) := A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ der Restklassenkörper bei $\mathfrak{p}$. Sei B eine A -Algebra.

- a) Zeige, dass die Primideale $\mathfrak{q}$ von B mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ in kanonischer Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu den Primidealen von $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \cong B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ stehen.

Sei im Folgenden B endlich über A .

- b) Zeige, dass B nur endlich viele Primideale besitzt, falls A ein Körper ist.
c) Zeige, dass es nur endlich viele Primideale $\mathfrak{q}$ wie in a) gibt.

Aufgabe 3. (2+2+m) *Dimension des Polynomrings im nicht-noetherschen Fall*

Sei A ein Ring.

- a) Gelte $1 \neq 0$ in A . Zeige: $\dim A[X] \geq 1 + \dim A$.
b) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A . Die Primideale $\mathfrak{q}$ von $A[X]$ mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ stehen in Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu den Primidealen eines gewissen Rings. Welchem? Welche Dimension hat dieser?
c) Zeige: $\dim A[X] \leq 1 + 2 \dim A$.

Aufgabe 4. (3) *Beispiele für Poincarésche Reihe und Hilbertsches Polynom*

Berechne die Poincarésche Reihe und das Hilbertsche Polynom des gewichteten $K[X, Y]$ -Moduls $K[X, Y]/(X^2, XY)$ bezüglich $\lambda = \dim_K$.

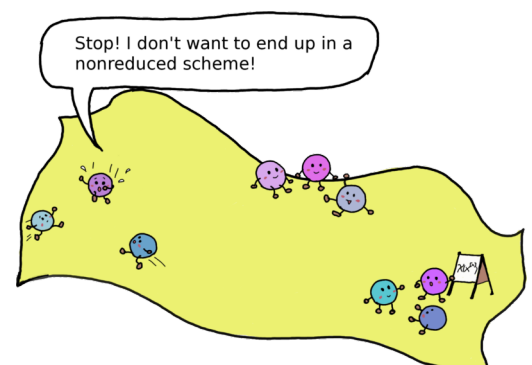
Aufgabe 5. (1) *Dualität zwischen symmetrischer und äußerer Algebra*

Sei K ein Körper. Sei $S = K[X_1, \dots, X_n]$ und sei E die zugehörige äußere Algebra der antikommutativen Polynome, wo $X_i X_i = 0$ und $X_i X_j = -X_j X_i$ gilt. Sei $\lambda = \dim_K$. Zeige: $\lambda(S, t) \cdot \lambda(E, -t) = 1$.

Aufgabe 6. (0) *Rationale Binomialkoeffizienten*

Wir setzen $\binom{x}{k} := x(x-1) \cdots (x-k+1)/k! \in \mathbb{Q}$ für rationale Zahlen x und natürliche Zahlen k . Solche Binomialkoeffizienten kommen in Taylor-Entwicklungen vieler wichtiger Funktionen vor.

- a) Zeige: Genau dann kommt im gekürzten Nenner einer rationalen Zahl a/b nicht der Primfaktor p vor, wenn es eine p -adische Ganzzahl u mit $bu = a$ gibt.
b) Verwende die Dichtheit von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_p$ und die Stetigkeit von Polynomen über $\mathbb{Z}_p$, um zu folgern: Im gekürzten Nenner eines rationalen Binomialkoeffizienten $\binom{x}{k}$ können nur solche Primfaktoren vorkommen, die auch im gekürzten Nenner von x vorkommen.



Übungsblatt 1111 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m) *Eine explizite Beschreibung der adischen Vervollständigung*

Sei $\mathfrak{a} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Ideal in einem noetherschen Ring A . Zeige, dass die Vervollständigung $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$ isomorph zu $A[[X_1, \dots, X_n]]/(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$ ist.

Aufgabe 2. (m+m) *Intervalle von Primidealen in noetherschen Ringen*

- Seien $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ Primideale in einem noetherschen Ring. Sei $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ die Menge all derjenigen Primideale $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{q}$. Zeige, dass $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ entweder leer oder unendlich ist.
- Sei A ein noetherscher Ring in dem alle Primideale in einer einzigen Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ mit $n \geq 2$ auftreten. Zeige: Es gibt ein Element $x \in A$ mit $x + 0 \neq x$.

Aufgabe 3. (m) *Dimension des Polynomrings im noetherschen Fall*

- Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem Ring, das minimal mit der Eigenschaft ist, ein gegebenes zerlegbares Ideal $\mathfrak{a}$ zu umfassen. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{a}$ assoziiert und sogar isoliert ist.
- Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe r in einem noetherschen Ring. Zeige, dass Elemente $x_1, \dots, x_r$ existieren, sodass $\mathfrak{p}$ unter allen Primidealen, die diese Elemente enthalten, minimal ist.
- Zeige für alle Primideale $\mathfrak{p}$ eines noetherschen Rings: $\text{ht } \mathfrak{p}[X] = \text{ht } \mathfrak{p}$.
- Sei A ein Ring in dem die Behauptung von c) gilt. Sei $\mathfrak{q} \subseteq A[X]$ ein Primideal. Sei $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$. Zeige: $\text{ht } \mathfrak{q} \leq \text{ht } \mathfrak{p} + 1$.
- Folgere: Für noethersche Ringe $A \neq 0$ gilt $\dim A[X] = 1 + \dim A$.

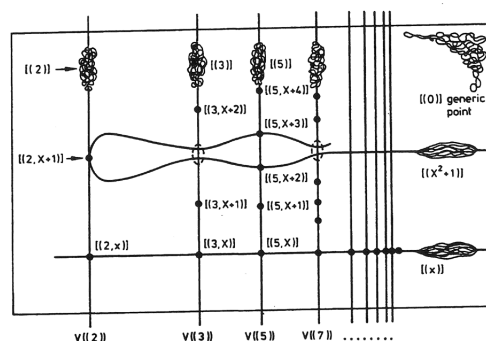
Aufgabe 4. (m) *Gar nicht mehr erste Schritte mit der Dimension von Ringen*

Berechne die Dimension des Rings $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X - Z, X^2 + Y^2 + Z^2)$.

Aufgabe 5. (0) *Der mystische Körper mit einem Element*

Der n -dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}_k^n$ über einem Körper k ist der Raum der Ursprungsgeraden in k^{n+1} .

- Wie viele Punkte enthält $\mathbb{P}_k^n$, wenn k ein Körper mit q Elementen ist? Gib die Anzahl als Polynom in q an.
- Im klassischen Zugang zur Algebra gibt es nichts, was die Bezeichnung *Körper mit einem Element* verdient hätte. Was passiert, wenn man trotzdem in der Formel aus a) $q := 1$ setzt? Was sollte also ein n -dimensionaler projektiver Raum über dem Körper mit einem Element sein?



Mumfords Schatzkarte: die Primideale von $\mathbb{Z}[X]$